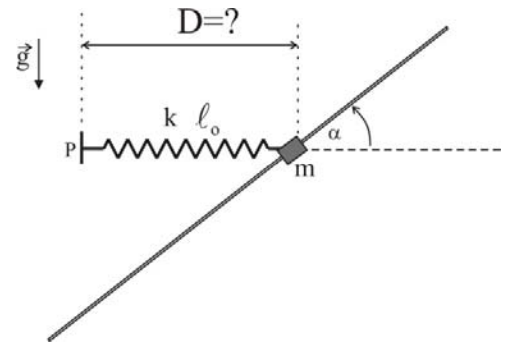
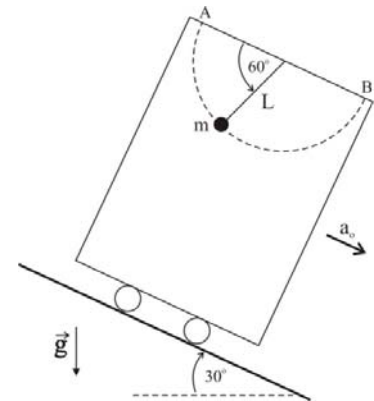


1. El anillo de masa  $m$  de la figura puede deslizar sin roce por una barra inclinada un ángulo  $\alpha$  respecto de la horizontal. El anillo está ligado a un punto fijo P mediante un resorte ideal de largo natural  $\ell_o$  y constante elástica  $k$ . Se pide:

- Determinar la distancia D para que la posición con el resorte horizontal corresponda a un punto de equilibrio del sistema (ver figura).
- Si se cumple que  $\alpha=30^\circ$  y  $k\ell_o=mg$ , determine el tipo de estabilidad del equilibrio de la parte a). Si fuese estable, determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a él. Si fuese inestable, indique si espera que existan equilibrios adicionales.

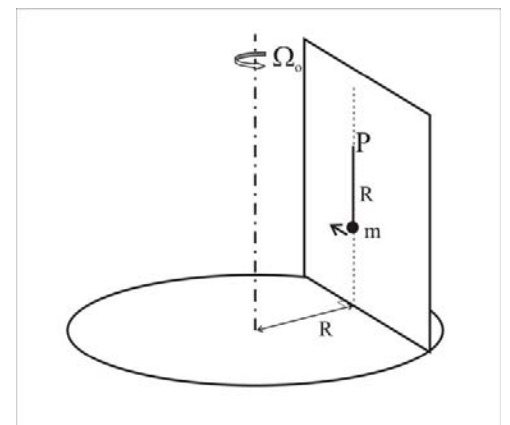


2. Un carro es arrastrado con aceleración  $a_o$  desconocida pendiente abajo sobre una superficie inclinada  $30^\circ$  respecto de la horizontal. Desde su techo cuelga una partícula de masa  $m$  atada mediante una cuerda ideal de largo  $L$ . Determine el valor de  $a_o$  tal que el equilibrio de la partícula respecto del carro ocurra con la cuerda formando un ángulo de  $60^\circ$  con el techo como muestra la figura. Determinar para este equilibrio la tensión de la cuerda y la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno él. Si la partícula es liberada desde el reposo (relativo al carro) tocando el techo en el punto A, indique si logrará llegar al punto B.



3. En un ambiente **sin gravedad** se tiene una plataforma que gira con velocidad angular  $\Omega_o$  constante como se muestra en la figura. Sobre la plataforma, y a una distancia  $R$  de su eje de rotación, se encuentra una pared colocada en forma perpendicular a ella. Por la cara interior de la pared se encuentra una partícula de masa  $m$  atada mediante una cuerda de largo  $R$  a un punto P fijo en la pared. Inicialmente la partícula se encuentra en reposo relativo en el punto más cercano a la plataforma (ver figura). La cuerda está extendida, pero sin tensión.

- A partir de la posición descrita, se perturba ligeramente a la partícula en dirección paralela a la plataforma, sacándola de su posición de equilibrio inestable inicial. Calcule la máxima rapidez relativa a la pared que alcanza la partícula.
- Muestre que en el movimiento resultante de la parte a) la fuerza normal que la pared le ejerce a la partícula y la tensión de la cuerda son siempre mayores o igual a cero.
- Indique todas las posiciones en que la partícula puede permanecer en equilibrio relativo, estando la cuerda estirada. Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones en torno a la(s) posición(es) de equilibrio estable.

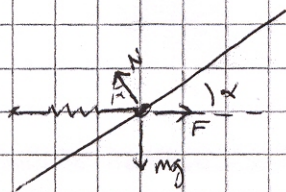


$$m\vec{a}' = \vec{F}_{reales} - m\vec{a}_o - 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}' - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') - m\vec{\alpha}_e \times \vec{r}'$$

P1

1/3

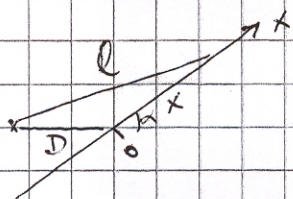
a)



$$\text{EQUIL: } \begin{cases} N \cos \alpha = mg & (1) \\ N \sin \alpha = F = k(l_0 - D) & (2) \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \rightarrow \tan \alpha = \frac{k(l_0 - D)}{mg} \rightarrow \boxed{D = l_0 - \frac{mg \tan \alpha}{k}} \quad (3)$$

b)



$$V(x) = mgx \sin \alpha + \frac{1}{2} k (l(x) - l_0)^2 \quad (4)$$

$l(x) ?$

$$l^2 = D^2 + x^2 - 2xD \cos(\pi - \alpha)$$

$$l^2 = D^2 + x^2 + 2xD \cos \alpha \quad (5)$$

$$\text{Equilibrio } \frac{d(4)}{dx} = 0 \quad \text{tipo de equilibrio } \frac{d^2(4)}{dx^2}$$

$$(4) \rightarrow \frac{dV}{dx} = mg \sin \alpha + k(l - l_0) \frac{dl}{dx} \quad (6)$$

$$\frac{d(6)}{dx} \rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = k \left( \frac{dl}{dx} \right)^2 + k(l - l_0) \frac{d^2l}{dx^2} \quad (7)$$

se necessitamos evaluar  $\frac{dl}{dx} + \frac{d^2l}{dx^2}$  en  $x=0$



(5)  $\rightarrow$

2/3

$$2l \frac{dl}{dx} = 2x + 2D \cos \alpha$$

$$\frac{dl}{dx} = \frac{x + D \cos \alpha}{l} \quad (8)$$

$$\frac{d^2l}{dx^2} = \frac{l - (x + D \cos \alpha) \frac{dl}{dx}}{l^2}$$

avaliando em  $x=0$  ;  $l=D$

$$\left. \frac{dl}{dx} \right|_{x=0} = \cos \alpha \quad (9)$$

$$\left. \frac{d^2l}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{D - D \cos^2 \alpha}{D^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{D} \quad (10)$$

1) e (10) em (7)  $\rightarrow$

$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=0} = k \cos^2 \alpha + k(D-l_0) \frac{\sin^2 \alpha}{D}$$

usando (3) :  $V''_{x=0} = k \cos^2 \alpha + k \left[ \frac{-mg}{k} \tan \alpha \right] \frac{\sin^2 \alpha}{D}$

$$V''_0 = k \cos^2 \alpha - \frac{mg}{D} \tan \alpha \sin^2 \alpha$$

$$V''_0 = k \cos^2 \alpha \left( 1 - \frac{mg}{kD} \tan^3 \alpha \right)$$

3/3

$$(3) \rightarrow \frac{kD}{mg} = \frac{k l_0}{mg} (1 - \tan^3 \alpha)$$

$$\Rightarrow V''_0 = k \cos^2 \alpha \left( 1 - \frac{mg}{k l_0} \frac{\tan^3 \alpha}{(1 - \tan^3 \alpha)} \right)$$

Se dice que  $k l_0 = mg$   $\alpha = 30^\circ \rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$   
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$V''_0 = k \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \right) = \frac{k}{4} 3 \left( \frac{3\sqrt{3} - 3 - 1}{3\sqrt{3} - 3} \right) > 0$$

EQ.  
ESTABLE

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m} \frac{1}{4} \left( \frac{3\sqrt{3} - 4}{\sqrt{3} - 1} \right)}$$



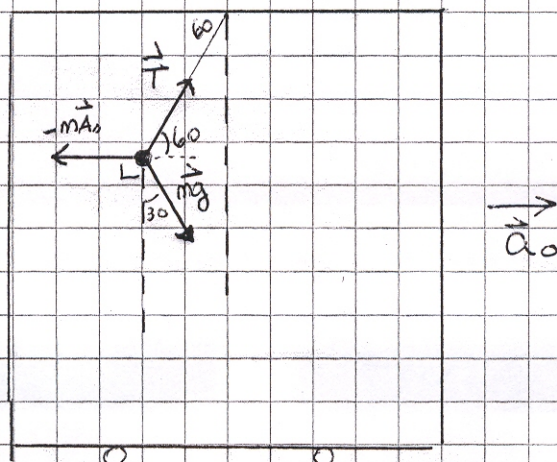
P2

# A) Solución "Física"

1/4

En el SRNI del carro:

EQUILIBRIO:



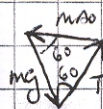
Fuerzas reales:  $\vec{T}$ ,  $m\vec{g}$

Fuerza inercial  $-m\vec{a}_0$

El equilibrio de fuerzas se establece con ellas formando 120° entre sí

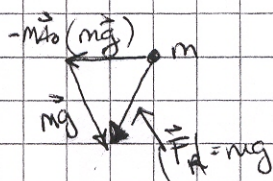
⇒ Para que la suma vectorial de las tres fuerzas sea cero → las tres deben tener igual magnitud

$$\Rightarrow |\vec{T}| = |m\vec{g}| = |-m\vec{a}_0|$$



$$\rightarrow a_0 = g \quad T = g$$

Las fuerzas  $-m\vec{a}_0$  y  $m\vec{g}$  son constantes en el espacio, por lo que se puede considerar sólo su resultante  $(-m\vec{a}_0 + m\vec{g}) = \vec{F}_R$



o dentro del carro el movimiento equivale a un péndulo con un "g" inclinado 30° respecto a la vertical

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L}$$

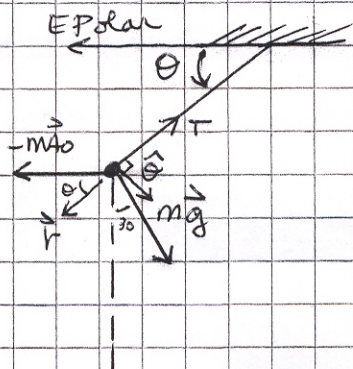
y si la partícula se suelta en A no llega a B. ==



## B) Solución "matemática"

2/4

Consideramos una porción arbitraria de la partícula en el SRNI:



$$\vec{F} = m a_0 \cos \theta \hat{r} - m a_0 \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\vec{m}\vec{g} = m g \cos(90 - \theta + 30) \hat{r} + m g \sin(90 - \theta + 30) \hat{\theta}$$

$$\vec{T} = -T \hat{r}$$

$$\vec{F}_{\text{cor}} = \vec{F}_{\text{cf}} = \vec{F}_{\text{tr}} = \vec{0}$$

Ec de Mto:

$$\hat{r}: -m R \ddot{\theta}^2 = m a_0 \cos \theta + m g \cos(120 - \theta) - T \quad (1)$$

$$\hat{\theta}: m R \ddot{\theta} = -m a_0 \sin \theta + m g \sin(120 - \theta) \quad (2)$$

Equilibrio en  $\theta_*$ :  $\ddot{\theta}|_{\theta_*} = 0$

$$0 = -m a_0 \sin \theta_* + m g \sin(120 - \theta_*)$$

queremos que el equilibrio  $\theta_* = 60^\circ$

$$\Rightarrow 0 = -m a_0 \sin 60 + m g \sin 60$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = g} \quad (3)$$

$$\text{en (1) con } \theta = 60^\circ \text{ y } a_0 = g \Rightarrow 0 = m g \cos 60 + m g \cos 60 - T$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{T = m g}$$

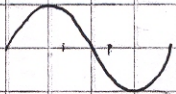


Pequeñas oscilaciones entorno al equilibrio:

3/4

$$(2): \cancel{m} R \ddot{\theta} = -\cancel{m} g \sin \theta + \cancel{m} g \sin(120 - \theta) \quad (4)$$

$$\sin(120 - \theta) = \underbrace{\sin 120 \cos \theta}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \underbrace{\cos 120 \sin \theta}_{-\frac{1}{2}}$$



$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$(4) \rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \left[ \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right]$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \underbrace{\left( \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right)}_{+\frac{dV_*}{d\theta}} \quad (*)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d^2 V_*}{d\theta^2} = \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$$

$$\left. \frac{d^2 V_*}{d\theta^2} \right|_{\theta_* = 60^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{R}} \quad (R=L)$$

(\*) : alternativamente se pudo linealizar el lado derecho de (\*) entorno a  $\theta = 60^\circ$ .  $\rightarrow$  se obtiene solución armónica.

4/4

$$\textcircled{*} \rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \left( \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right)$$

$$\int_0^{\dot{\theta}_f} \dot{\theta} \, d\dot{\theta} = \int_0^{\pi} -\frac{g}{R} \left( \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) d\theta$$

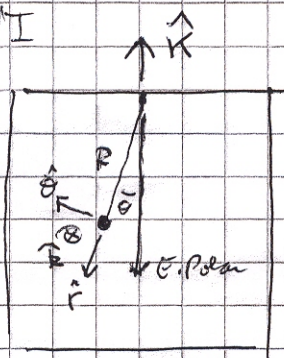
$$\frac{1}{2} \dot{\theta}_f^2 = -\frac{g}{R} \left[ -\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{g}{R} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} (0 - 0) \right] = -\frac{g}{R}$$

$\dot{\theta}_f^2 < 0 \Rightarrow$  partícula não chega  
a B.



SRNI

 $\frac{1}{3}$ 

$$\vec{\Omega}_e = \Omega_0 \hat{k}$$

$\hat{r} = -\cos \theta \hat{k} + \sin \theta \hat{\phi}$

$$\frac{1}{T} \text{reals:} \quad -N \hat{K} - T \hat{r}$$

$\Rightarrow$  increase:

$$\vec{A}_C = -R \Omega_0^2 \hat{k} \rightarrow -m \vec{A}_C = m R \Omega_0^2 \hat{k}$$

$$\tau_{\perp \text{ cor}} = -2m\Omega_0(-\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{e}) \times R\hat{\theta}\hat{\theta}$$

$$\tau_{\theta} = 2m\Omega_0 R \dot{\theta} \cos\theta \hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}_e \times \vec{r} &= \Omega_0 (-\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}) \times R \hat{r} \\ &= -\Omega_0 \sin\theta R \hat{\theta}\end{aligned}$$

$$\tau_{\text{cf}}^{\text{II}} = -m \vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times \vec{r}) = -m \Omega_0 (-\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}) \times \left( -\frac{\Omega_0 \sin\theta}{R} \hat{r} \right)$$

$$\vec{F}_d = m\omega_c^2 R \sin\theta (\cos\theta \hat{e} + \sin\theta \hat{r})$$

$$\hat{\theta}: \left[ m R \hat{\theta}^{\infty} = m R \Omega_0^2 \text{ same core} \right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dot{\phi} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Omega_0^2 \sin \phi \cos \phi d\phi$$

$$\frac{1}{2} \dot{\Theta}^2 = \frac{1}{2} \Omega_0^2 \sin^2 \Theta \rightarrow \dot{\Theta} = \Omega_0 \sin \Theta$$



Max Rapidiz

2/3

$$\theta = 90^\circ$$

$$\dot{\theta}^2 = \Omega_0^2 \rightarrow \boxed{v_{\text{max}} = R \Omega_0}$$

b)

$$\hat{k}: 0 = -N + mR\Omega_0^2 + 2mR\Omega_0\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\rightarrow N = mR\Omega_0^2 + 2mR\Omega_0(\Omega_0 \sin\theta)\cos\theta$$

$$N = mR\Omega_0^2(1 + 2\sin\theta\cos\theta) \geq 0 \quad \checkmark$$

$\hat{r}$ :

$$-mR\dot{\theta}^2 = -T + m\Omega_0^2 R \sin^2\theta$$

$$\rightarrow T = mR\dot{\theta}^2 + m\Omega_0^2 R \sin^2\theta$$

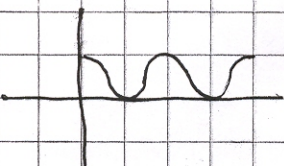
$$= mR(\Omega_0 \sin\theta)^2 + m\Omega_0^2 R \sin^2\theta$$

$$T = 2mR\Omega_0^2 \sin^2\theta \geq 0 \quad \checkmark$$

c)  $\ddot{\theta} = \Omega_0^2 \sin\theta \cos\theta$

Equilib.  $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

$$-\frac{dV_*}{d\theta} = \Omega_0^2 \sin\theta \cos\theta \rightarrow V_* = \frac{\Omega_0^2}{2} \cos^2\theta$$



$\theta = 90^\circ$  est eq. instable,  $\theta = 270^\circ$  EE.  
 $\theta = 0^\circ, 180^\circ$  EI



3/3

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -\Omega_0^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = -\Omega_0^2 (1 - 2\sin^2\theta)$$

$$\theta_* = 90^\circ, 270^\circ \quad \left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta_*} = \Omega_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \Omega_0^2}$$